VŨ DƯƠNG THỤY (Chủ biên)
ĐẶNG THANH HẢI – NGUYỄN HUY TÂN - NGUYỄN NGỌC XUÂN

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN Ở TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tập I – ĐẠI SỐ

Dành cho

* **Học sinh Trung học Phổ thông**
* **Giáo viên Toán Trung học Phổ thông**
* **Bạn trẻ yêu Toán**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Để giúp các em học sinh Trung học Phổ thông (THPT), các thầy cô giáo toán và bạn đọc có một tài liệu đầy đủ, hệ thống về các kiến thức Toán bậc THPT, về các dạng toán cơ bản, về các phương pháp thông dụng để giải Toán THPT, chúng tôi biên soạn bộ sách "***Các dạng Toán cơ bản ở Trung học Phổ thông và phương pháp giải***". Bộ sách gồm năm tập :

- Tập I : Đại số
- Tập II : Lượng giác
- Tập III : Hình học
- Tập IV : Giải tích
- Tập V : Một số đề ôn tập tổng hợp.

Trong bốn tập đầu, các tác giả phân loại và sắp xếp các dạng bài toán theo từng chủ đề. Ở mỗi chủ đề, trước tiên giới thiệu ***các kiến thức và phương pháp cơ bản***. Đó là các khái niệm cơ bản ; các công thức, định lí có liên quan đến các khái niệm này. Kèm theo từng cụm kiến thức là những phương pháp cơ bản, giúp định hướng tìm lời giải.

Tiếp theo, thông qua ***một số ví dụ điển hình***, tác giả cung cấp cho bạn đọc ***những phương pháp thông dụng*** để giải từng dạng toán. Lời giải các ví dụ được trình bày chi tiết, có phân tích định hướng phương pháp giải. Nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhau, có đánh giá bình luận và lưu ý những sai lầm thường gặp của học sinh.

Cuối mỗi chủ đề tác giả giới thiệu một hệ thống phong phú các ***bài tập***. Nhiều bài tập là đề thi vào các trường Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây, có kèm theo hướng dẫn hoặc đáp số.

Tập V của bộ sách giới thiệu một số đề ôn tập tổng hợp, có cấu trúc tương tự đề thi vào các trường Đại học – Cao đẳng để học sinh tự luyện tập toàn diện sau khi đã nắm chắc kiến thức và phương pháp giải của từng chủ đề, từng dạng toán.

Ngoài các bài toán bám sát chương trình và Sách giáo khoa THPT, các tác giả còn lựa chọn giới thiệu một số bài toán nâng cao, mở rộng nhằm đáp ứng nhu cầu giảng dạy và học tập của các thầy cô giáo và học sinh trường chuyên.

Bộ sách được biên soạn công phu theo hướng tích hợp nội dung và phương pháp trình bày. Hi vọng mỗi quyển sách sẽ là một tài liệu bổ ích và thiết thực cho học sinh, các thầy cô giáo và các bậc cha mẹ học sinh.

Mặc dù đã rất cố gắng, song bộ sách không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của đông đảo bạn đọc.

Mọi ý kiến xin gửi về : CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI, NXB GIÁO DỤC VIỆT NAM, 187B GIẢNG VÕ, QUẬN ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI.

Xin trân trọng cảm ơn.

Các tác giả

Chủ đề 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐẠI CƯƠNG

Để lĩnh hội được các kiến thức và phương pháp cơ bản trong chương trình Toán THPT, chúng tôi nhắc lại và giới thiệu một số khái niệm, kiến thức và phương pháp cốt yếu có liên quan đến hầu hết các chủ đề của bộ sách. Các khái niệm, kiến thức và phương pháp cơ bản sẽ được lặp lại, nhấn mạnh ở từng chủ đề khi cần thiết.

I. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A- KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

Trong nhiều ngành của Toán học : Đại số, Hình học, Giải tích, ... để chứng minh tính đúng đắn của mệnh đề A(n) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta thường dùng *phương pháp quy nạp toán học*, được tiến hành theo hai bước sau đây:

1) Trước hết kiểm tra rằng mệnh đề A(n) đúng với $n = 1$ (bước cơ sở).
2) Giả sử mệnh đề A(n) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), ta cần chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$ (bước quy nạp).

Khi đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, ta kết luận được mệnh đề A(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

B- VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$, số $2^{2^n} + 1$ có tận cùng là chữ số 7 .

Lời giải:

Đặt $F(n) = 2^{2^n} + 1$

- Với $n = 2$, ta có $F(2) = 2^4 + 1 = 17$, tận cùng là 7.
- Giả sử F(k) có tận cùng là 7 (với $k \geq 2$), ta phải chứng minh F(k+1) có tận cùng là 7.

Ta có $F(k + 1) = 2^{2^{k+1}} + 1 = 2^{2^k . 2} + 1 = (2^{2^k})^2 + 1$

Theo giả thiết quy nạp , $F(k)=2^{2^k}+1$ có tận cùng là 7, suy ra 2^{2^k} và do đó $\left(2^{2^k}\right)^2$ có tận cùng là 6. Vậy F(k + 1) có tận cùng là 7.

Theo nguyên lí quy nạp , F(n) có tận cùng là 7, $\forall n > 1$.

Lưu ý: Trong biểu thức F(k+1), ta cố gắng biến đổi làm xuất hiện F(k) để sử dụng giả thiết quy nạp.

Ghi chú : Nhà toán học Pháp Phéc - ma (P. Fermat) khi xét các số dạng $F(n) = 2^{2^n}+1$ thấy rằng với n = 0,1, 2, 3, 4 thì F(n) đều là những số nguyên tố. Từ đó ông dự đoán rằng: "Mọi số có dạng $2^{2^n}+1$, với $n \in \mathbb{N}$, đều là số nguyên tố".

Tuy nhiên, 100 năm sau nhà toán học Thuỵ Sĩ Ơ - Le (Euler) lại phát hiện ra rằng với n = 5 thì kết luận đó không còn đúng nữa, vì

$$2^{2^5}+1 = 4294967297, \text{ chia hết cho } 641.$$

Lưu ý

Phép chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học không phải bao giờ cũng bắt đầu phép thử từ n = 1. Trong nhiều trường hợp ta phải chứng minh một mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên n là đúng với mọi $n \geq p$ (p là số tự nhiên cố định). Trong những trường hợp đó ta áp dụng nguyên lí quy nạp toán học dưới dạng sau:

"Nếu một mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên n là đúng với n = p và từ giả thiết nó đúng với n = k (k ≥p) suy ra được nó cũng đúng với n = k+1, thì mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên n ≥ p ".

(Phương pháp quy nạp toán học của chúng ta thường dựa trên nguyên lí quy nạp trên đây trong trường hợp p =1).

Ví dụ 2. Với những giá trị nguyên dương nào của n, bất đẳng thức

$$2^n > n^2$$

được nghiệm đúng ?

Lời giải:

Rõ ràng với n = 1 bất đẳng thức đúng. Chúng ta hãy kiểm tra khả năng tiến hành bước tiếp theo của quá trình quy nạp. Giả sử với n = k, bất đẳng thức $2^k > k^2$ là đúng. Khi đó $2^{k+1} = 2.2^k > 2.k^2$. Để hoàn thành bước 2 ta phải có bất đẳng thức $2k^2 \geq (k+1)^2$ để từ đó, theo tính chất bắc cầu suy ra $2^{k+1} > (k+1)^2$. Tuy nhiên, bất đẳng thức $2k^2 \geq (k+1)^2$ chỉ đúng với $k \geq 1+\sqrt{2}$, tức là $k \geq 3$ (vì $k \in \mathbb{N}^*$). Như vậy, không thể lấy p =1 làm giá trị bắt đầu của bước cơ sở.

Ta thử lấy giá trị p =3. Với $k \geq 3$ thì bất đẳng thức $2k^2 \geq (k+1)^2$ là đúng, nhưng bản thân bất đẳng thức $2^3 > 3^2$ lại không đúng, cho nên ta không thể thực hiện bước 1 của phép quy nạp bắt đầu từ n = 3.

Giá trị n = 4 cũng không làm cho bất đẳng thức $2^n > n^2$ đúng. Với n =5, bất đẳng thức này đúng và giá trị bắt đầu của bước 1 là p =5. Với $k \geq 5$ bước 2 của phép quy nạp dễ dàng được thực hiện.

Tóm lại, bất đẳng thức $2^n > n^2$ đúng với n =1 và mọi số tự nhiên $n \geq 5$.

Nhận xét

Việc tiến hành hai bước của phép chứng minh quy nạp là rất cần thiết. Bỏ đi một trong hai bước đều có thể dẫn đến những kết luận sai. Chẳng hạn, trong Ví dụ 2 trên đây, nếu bỏ bước 1, chỉ tiến hành bước 2 sẽ dẫn đến kết luận: *"Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ ta có* $2^n > n^2$ *"*. Rõ ràng kết luận này là sai , chẳng hạn với n = 3 hoặc n = 4.

Ta hãy xét một trường hợp nữa. Với n = 1, 2, 3, 4, số $n^2 + n + 17$ tương ứng là các số nguyên tố 19, 23, 19, 37. Chúng ta kiểm tra một vài giá trị tiếp theo nữa của n , chẳng hạn n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, số $n^2 + n + 17$ cũng là số nguyên tố (!). Liệu đến đây ta có thể khẳng định rằng: *"Với mọi số tự nhiên n , số $n^2 + n + 17$ là số nguyên tố "* được không? Đương nhiên là không thể ! Khẳng định như vậy là thiếu cơ sở lôgic. Hơn nữa, bạn đọc có thể dễ kiểm tra trực tiếp được, chẳng hạn, với n = 16 thì $n^2 + n + 17 = 289 = 17^2$, không là số nguyên tố.

Ví dụ trên đây mang lại một ý nghĩa rất quan trọng: Không phải chỉ làm phép kiểm tra (bước 1) với 4, 5 giá trị đầu tiên của n mà phải kiểm tra với một số lượng lớn hoặc rất lớn .Tuy nhiên, cũng không thể từ đó mà suy ra được mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên n , bởi vì dù có thể thử đến lần thứ 1 triệu, chúng ta cũng không thể nói gì về kết quả của bước thử thứ 1 000 001.

Phép suy luận như trên đây thuộc loại *quy nạp không hoàn toàn.* Nó không đủ cơ sở lôgic để chúng ta đưa ra những kết quả đúng đắn. Trong ví dụ trên với số $n^2 + n + 17$, qua 16 bước kiểm tra chúng ta đã nhanh chóng tin chắc được số này không phải luôn là số nguyên tố.

Xin đưa thêm một ví dụ nữa. Dễ dàng kiểm tra rằng với n = 1, 2, 3, 4, 5, ..., số $991n^2 + 1$ không là số chính phương. Phép kiểm tra như vậy có thể được tiến hành thậm chí đến hàng tỉ giá trị đầu tiên của n. Tuy nhiên, điều khẳng định rằng với mọi số tự nhiên n, số $991n^2 + 1$ không là số chính phương, vẫn không đúng. Nhờ máy tính điện tử người ta đã tìm được một số n gồm 29 chữ số mà $991n^2 + 1$ là số chính phương.

Phép quy nạp không hoàn toàn chỉ giúp chúng ta dự đoán kết quả. Muốn có được kết luận chính xác ta phải dùng phương pháp quy nạp toán học.

* Trong một số bài toán, nguyên lí quy nạp toán học còn được sủ dụng dưới dạng sau đây.

Mệnh đề A(n) sẽ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là số tự nhiên nào đó cố định), nếu hai điều kiện sau đây được thoả mãn :

1) Mệnh đề A(n) đúng với n = p và n = p +1.

2) Từ giả thiết A(n) đúng với n = k và n = k – 1 (k tuỳ ý lớn hơn p), suy ra A(n) cũng đúng với n = k+1.

Nếu trong biểu thức A(n +1) xuất hiện cả A(n) và A(n−1) thì ở bước 1 ta phải kiểm tra tính đúng đắn của mệnh đề với hai giá trị liên tiếp $n = p$ và $n = p+1$.

Để minh hoạ nguyên lí này, ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức

$$S_n = (7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n$$

luôn nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải:

Đặt $\alpha = 7+4\sqrt{3}$, $\beta = 7-4\sqrt{3}$ thì $\alpha+\beta = 14$, $\alpha\beta = 1$.

Ta có $S_n = \alpha^n + \beta^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

− Với $n = 1$, ta có $S_1 = \alpha+\beta = 14$.

Với $n = 2$, ta có $S_2 = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 194$.

Rõ ràng S_1, S_2 là số nguyên.

− Giả sử S_k và S_{k-1} là số nguyên $(k > 1)$.

Ta cần chứng minh S_{k+1} cũng là số nguyên .Thật vậy,

$$S_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = (\alpha^k + \beta^k)(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1})$$
$$= 14S_k - S_{k-1}.$$

Theo giả thiết quy nạp, S_k và S_{k-1} là số nguyên, do đó S_{k+1} là số nguyên.

Vậy S_n nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 4. Cho dãy số (a_n) có $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+1)$ $(n \geq 2)$. Hãy viết 5 số hạng đầu tiên của dãy. Dự đoán và chứng minh công thức tính a_n theo n.

Lời giải:

Ta có: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{4}$, $a_4 = \frac{9}{8}$, $a_5 = \frac{17}{16}$.

Dự đoán: Các số hạng của dãy là phân số có mẫu là luỹ thừa của 2, tử số hơn mẫu số 1 đơn vị, cụ thể là $a_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$. (1)

Ta hãy chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học. Như trên ta thấy công thức đúng với $n = 1$:

$$a_1 = \frac{2^0 + 1}{2^0} = 2.$$

Giả sử công thức (1) đúng với n = k ($k \geq 1$), ta chứng minh nó đúng với n = k+1.

Thật vậy, theo giả thiết của bài toán và giả thiết quy nạp ta có

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2^{k-1} + 1}{2^{k-1}} + 1\right) = \frac{1}{2}.\frac{2.2^{k-1} + 1}{2^{k-1}} = \frac{2^k + 1}{2^k}.$$

Như vậy công thức đúng với n = k+1 và do đó nó đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 5. Chứng minh công thức Nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

với n nguyên dương.

Lời giải:

- Dễ thấy công thức đúng với n = 1.
- Giả sử công thức đúng với số tự nhiên $n \geq 1$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Thật vậy,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$$
$$= [a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n](a+b)$$
$$= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \ldots + C_n^k a^{n+1-k} b^k + \ldots + ab^n +$$
$$+ a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + \ldots + b^{n+1}$$

Suy ra

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (1 + C_n^1) a^n b + (C_n^1 + C_n^2) a^{n-1} b^2 + \ldots$$
$$+ (C_n^{k-1} + C_n^k) a^{n+1-k} b^k + \ldots + b^{n+1}$$

Các hệ số trong vế phải của đẳng thức trên được rút gọn theo công thức

$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, do đó ta có

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$. Vậy công thức được chứng minh.

II. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

A- KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

Bên cạnh những phương pháp chứng minh trực tiếp ta còn dùng phương pháp chứng minh gián tiếp. Để chứng minh mệnh đề :" Nếu A thì B" (hay $A \Rightarrow B$) ta có thể chứng minh mệnh đề tương đương $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (mệnh đề phản đảo) hoặc chứng minh phản chứng : Giả sử có A (giả thiết) mà không có B. Bằng những lập luận lôgic kết hợp với các tiên đề, định lí đã biết ta suy ra một điều vô lí hoặc một kết quả trái với giả thiết. Khi đó ta kết luận mệnh đề $A \Rightarrow B$ đã được chứng minh.

Phương pháp chứng minh gián tiếp thường được áp dụng trong các bài toán chứng minh sự tồn tại hay không tồn tại một đại lượng nào đó (hoặc sự xảy ra hay không xảy ra một sự kiện nào đó).

B- VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $b_1b_2 = 2(c_1 + c_2)$ (*) thì ít nhất một trong hai phương trình sau phải có nghiệm :

$$x^2 + b_1x + c_1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + b_2x + c_2 = 0.$$

Lời giải:

Giả sử có điều kiện (*) mà cả hai phương trình đã cho đều vô nghiệm. Thế thì ta có $\Delta_1 + \Delta_2 = \left(b_1^2 - 4c_1\right) + \left(b_2^2 - 4c_2\right) < 0$ hay $\left(b_1^2 + b_2^2\right) - 4\left(c_1 + c_2\right) < 0$ (1). Nhưng ta lại có $b_1^2 + b_2^2 \ge 2b_1b_2 = 4\left(c_1 + c_2\right) \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 - 4\left(c_1 + c_2\right) \ge 0$, mâu thuẫn với (1).

Vậy ít nhất một trong hai phương trình đã cho phải có nghiệm.

Ví dụ 2. Cho các số a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases} a + b + c > 0 & (1) \\ ab + bc + ca > 0 & (2) \\ abc > 0 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng các số a, b, c đều dương.

(Đề thi vô địch Tiệp Khắc – 1959)

Lời giải:

Giả sử ngược lại, có ít nhất một trong ba số a, b, c không dương, chẳng hạn $a \le 0$.

Do (3) nên $\begin{cases} a < 0 \\ bc < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$

– Xét trường hợp $a < 0, b < 0, c > 0$ (4)

Từ (4) có $a + b < 0$. Kết hợp với (1) có $c > -a - b$, suy ra $c(a + b) < -(a + b)^2$

$$\Rightarrow \quad ab + c(a + b) < ab - (a + b)^2 = -(a^2 + b^2 + ab)$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca < -\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3a^2}{4} < 0 \text{: Mâu thuẫn với (2).}$$

– Trường hợp $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ xét tương tự cũng dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy các số a, b, c đều dương.

Lưu ý. Trong quá trình giải quyết các bài toán, một điều rất quan trọng là biết diễn đạt các mệnh đề toán học ở dạng ngôn ngữ thông thường thành các biểu thức hoặc đẳng thức toán học. Chẳng hạn,

a) "Hai số a và b không đồng thời bằng không" được viết là $a^2 + b^2 \neq 0$ hoặc $a^2 + b^2 > 0$.

b) " Trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có ít nhất một số bằng a" được viết là

$$(a_1 - a)(a_2 - a)\ldots(a_n - a) = 0.$$

c) " Trong ba số a, b, c có ít nhất hai số bằng 0" được viết là

$$|ab| + |bc| + |ca| = 0.$$

III. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

A- KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

1) Cấp số cộng và cấp số nhân là hai dãy số đặc biệt, có nhiều tính chất đặc trưng và có những ứng dụng hiệu quả trong việc nghiên cứu Số học - Đại số, đặc biệt là các bài toán liên quan đến tập số tự nhiên và tập số nguyên.

2) Cấp số cộng và cấp số nhân có những tính chất tương tự

Cấp số cộng

- (U_n) là cấp số cộng

  $\Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + d \; (n \geq 1)$.

- Công sai $d = U_{n+1} - U_n$.

- $U_n = \dfrac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$.

- $U_n = U_1 + (n-1)d$.

- Tổng n số hạng đầu tiên

  $S_n = \dfrac{(U_1 + U_n)n}{2}$.

Cấp số nhân

- (U_n) là cấp số nhân

  $\Leftrightarrow U_{n+1} = U_n.q \; (n \geq 1)$.

- Công bội $q = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$.

- $U_n^2 = U_{n-1}.U_{n+1}$.

- $U_n = U_1 . q^{n-1}$.

- Tổng n số hạng đầu tiên

  $S_n = \dfrac{U_1(q^n - 1)}{q-1}$, $(q \neq 1)$.

Lưu ý.
Để tránh trường hợp tầm thường, với cấp số nhân ta chỉ xét trường hợp $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$.

3) Cấp số cộng và cấp số nhân có mối liên hệ đặc biệt :

- Nếu dãy (u_n) là cấp số cộng thì dãy $\left(a^{u_n}\right)$ là cấp số nhân $(0 < a \neq 1)$.

- Nếu dãy (v_n) là cấp số nhân (với các số hạng dương) thì dãy $\left(\log_a v_n\right)$ là cấp số cộng $(0 < a \neq 1)$.

Để chứng minh một dãy số là cấp số cộng hay cấp số nhân, ta có thể dùng định nghĩa hoặc tính chất đặc trưng của mỗi cấp số:

- (U_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = \text{const}, \forall n \geq 1$

  $\Leftrightarrow U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n, \forall n \geq 2$.

- (U_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \text{const}, \forall n \geq 1$

  $\Leftrightarrow U_{n-1}U_{n+1} = U_n^2, \forall n \geq 2$.

4) Cấp số cộng (U_n) có 5 yếu tố :

Số hạng đầu U_1, số hạng thứ n (tức U_n), công sai d, số số hạng n và tổng n số hạng đầu tiên S_n . Nếu biết 3 trong 5 yếu tố này ta có thể tìm được 2 yếu tố còn lại, tức là xác định được cấp số cộng.

Tương tự, đối với cấp số nhân cũng có 5 yếu tố : U_1 , U_n , q (công bội), n và S_n . Nếu biết 3 trong 5 yếu tố này ta có thể tìm được 2 yếu tố còn lại.

Đối với cấp số cộng hay cấp số nhân vô hạn , chỉ cần biết 2 trong 4 yếu tố : U_1 , U_n , d (hoặc q) và S_n , ta sẽ tìm được các yếu tố còn lại.

B- VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Biết rằng tổng của n số hạng đầu tiên của một dãy số có dạng $S_n = 5n^2 - 4n$. Chứng minh rằng dãy số này là cấp số cộng . Tìm công sai của nó.

Lời giải:

Giả sử dãy đang xét là (a_n). Với $n \geq 2$ ta có

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 5n^2 - 4n - [5(n-1)^2 - 4(n-1)]$$
$$= 10n - 9 .$$ Với $n = 1$ công thức vẫn đúng, vì $a_1 = S_1 = 1$.

Khi đó $a_{n+1} - a_n = 10(n+1) - 9 - (10n - 9) = 10$.

Vậy (a_n) là cấp số cộng với công sai $d = 10$.

Ví dụ 2. Dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

Lời giải:

Tính tiếp $u_2 = \sqrt{3+6} = 3$, $u_3 = \sqrt{3+6} = 3$, ...dự đoán $u_n = 3$ $\forall n \geq 1$. Bằng phương pháp quy nạp dễ dàng kết luận được dãy (u_n) là dãy hằng : $u_n = 3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 0$, đồng thời nó là cấp số nhân vơí công bội $q = 1$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu 3 cạnh của một tam giác lập thành một cấp số nhân thì công bội của cấp số nhân đó phải nằm giữa $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Lời giải:

Gọi một cạnh của tam giác là x, khi đó các cạnh kia sẽ là xq, xq^2 $(x > 0, q > 0)$.

Theo tính chất liên hệ giữa các cạnh của tam giác ta có:

$$\begin{cases} xq^2 < x + xq & (1) \\ x < xq + xq^2 & (2). \end{cases}$$

Từ (1) ta có $q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ (2) ta có $q^2 + q - 1 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ q < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $q > 0$ ta có $q > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vậy $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ví dụ 4. Số đo ba góc A, B, C của tam giác ABC theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Biết rằng C = 5A. Tính các góc của tam giác.

Lời giải :

Gọi d là công sai của cấp số cộng , ta có ba góc của tam giác là A, A + d, A + 2d . Theo giả thiết ta có A + 2d = 5A. (1).

Mặt khác , $A + (A + d) + (A + 2d) = 180^0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} d = 2A \\ 3A + 3d = 180^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 20^0 \\ d = 40^0 \end{cases}$

Vậy ba góc của tam giác là $20^0, 60^0, 100^0$.

Ví dụ 5. Tính tổng các số tự nhiên từ 1 đến 1000 , không chia hết cho 3.

Lời giải :

Tổng S cần tính bằng hiệu giữa tổng S_1 các số tự nhiên từ 1 đến 1000 và tổng S_2 các bội số của 3 từ 3 đến 999.

Ta có $S_1 = \dfrac{(1+1000).1000}{2} = 500500.$

Các bội số của 3 từ 3 đến 999 lập thành cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$, d= 3, $u_n = 999$. từ công thức $u_n = u_1 + (n-1)\,d$ ta có $999 = 3 + (n-1).3 \Rightarrow n = 333$.

Do đó $S_2 = \dfrac{(3+999).333}{2} = 166833.$

Vậy tổng cần tìm là $S = S_1 - S_2 = 500500 - 166833$
$= 333667.$

Ví dụ 6. Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$, $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+1}$ $(n \geq 2)$.

Tìm công thức tổng quát của u_n.

Lời giải :

Dễ thấy mọi số hạng của dãy (u_n) đều dương. Đặt

$$v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{2u_{n-1}+1}{u_{n-1}} = 2 + \frac{1}{u_{n-1}} = v_{n-1} + 2$$

$\Rightarrow$ v_n là cấp số cộng với $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{1}{3}$, công sai d = 2. Theo công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng, ta có $v_n = v_1 + (n-1).2 = \dfrac{1}{3} + 2(n-1)$.

Từ đó $u_n = \dfrac{3}{6n-5}$ $(n \geq 1)$.

IV. CĂN SỐ VÀ LŨY THỪA

A- KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

1. Cho số tự nhiên $n \geq 1$. Căn bậc n của số a là một số mà luỹ thừa bậc n của nó thì bằng a.

Với $a \geq 0$ ta có $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a.$

2. Chỉ có số không âm mới có căn bậc chẵn.

Với $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, với mọi a ta có

$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$. Đặc biệt, $\sqrt{A^2} = |A|$

Với n lẻ $(n = 2k + 1)$, với mọi $a \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại duy nhất căn bậc n của a, ngoài ra, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Căn thức là một dạng biểu thị đặc biệt của luỹ thừa, có thể chuyển về dạng luỹ thừa để dễ dàng thực hiện các phép tính (với điều kiện các biểu thức đều có nghĩa).

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. *Các tính chất của lũy thừa với số mũ thực*

3.1. Với $a > 0$ ta có $a^\alpha > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

Với $a > 1$ ta có $a^\alpha > 1, \forall \alpha > 0$.

3.2. Cho $a, b > 0$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}; \quad \left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

3.3. Nếu $a > 1$ ta có : $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

Nếu $0 < a < 1$ ta có : $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.

- Hệ quả

1/ Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó $a^x = a^y$ khi và chỉ khi $x = y$;

2/ Cho $a > 0$, x là số thực. Nếu $a^x = 1$ thì hoặc $a = 1$ hoặc $x = 0$.

3/ Cho $a, b > 0$; x là số thực. Nếu $a^x = b^x$ thì $a = b$.

4/ Cho $0 < x_1 < x_2$. Khi đó :

Nếu $p > 0$ thì $x_1^p < x_2^p$;

Nếu $p < 0$ thì $x_1^p > x_2^p$.

- Các trường hợp đặc biệt

1/ Với $a, b > 0$; m, n và k là các số nguyên dương. Ta có

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k; \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

2/ Đối với hai số a, b không âm và n nguyên dương, ta có

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}; \quad a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Các tính chất trên đây là cơ sở để nghiên cứu hàm số lũy thừa và hàm số mũ, cũng như để giải phương trình, bất phương trình mũ.

B- VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Lời giải :

Đặt $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, ta có

$$x^3=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}.x$$

$$=40+3\sqrt[3]{20^2-2.14^2}.x=40+6x.$$

Suy ra x là một nghiệm của phương trình

$$x^3-6x-40=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+10)=0. \qquad (1)$$

Vì $x^2+4x+10=(x+2)^2+6>0$ nên phương trình (1) có nghiệm thực duy nhất là $x=4$.

Vậy $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\left(4-\sqrt{10}\right)^{x^2-2x}=1.$$

Lời giải :

Ta có $4-\sqrt{10}>0$ nên từ phương trình rút ra $x^2-2x=0$, suy ra $x=0$, $x=2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0$ và $x=2$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$y=2^x+2^{1-x}.$$

Lời giải :

Ta có $y=2^x+\dfrac{2}{2^x}\geq 2\sqrt{2^x.\dfrac{2}{2^x}}=2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2^x=\frac{2}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x}=2 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy $\min y=2\sqrt{2}$, đạt được khi $x=\dfrac{1}{2}$.

V. CÁC PHÉP TÍNH LÔGARIT

A- KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

1. *Định nghĩa*

Cho a là số dương khác 1. Lôgarit cơ số a của số b, kí hiệu $\log_a b$, là số x sao cho $a^x = b$.

$$\boxed{x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b}$$

Lưu ý. 1^0 Chỉ số dương mới có lôgarit.

2^0 Với mọi số a dương khác 1, ta có $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

2. *Tính chất*

Cho $0 < a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có

1^0 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

2^0 $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$;

3^0 $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$ $(n \geq 2)$;

4^0 $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x$, $\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x$;

5^0 $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $(0 < b \neq 1)$ (công thức đổi cơ số).

3. *Lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên và tính lôgarit bằng MTBT*

- Lôgarit cơ số 10 của một số được gọi là *lôgarit thập phân* của số đó. Thay cho $\log_{10} x$, ta viết $\lg x$ hay $\log x$.
- Lôgarit cơ số *e* của một số được gọi là *lôgarit tự nhiên* của số đó. Thay cho $\log_e x$, ta viết $\ln x$ (số *e* là giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $e \approx 2{,}71$).
- Để tính lôgarit của một số bằng máy tính bỏ túi, ta dựa trên công thức đổi cơ số :

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Chẳng hạn, tính $\log_2 126$. Dùng máy tính bỏ túi loại CASIO fx - 570ES hoặc các loại máy có chức năng tương đương, ta lần lượt bấm các phím

$$\boxed{\ln}\ 126\ \boxed{\div}\ \boxed{\ln}\ 2\ \boxed{=}$$

Màn hình hiện kết quả (gần đúng) 6.977279924.

Vậy $\log_2 126 \approx 6,98$.

4. ***So sánh hai lôgarit cùng cơ số***

Cho hai số dương x_1, x_2.

- Với $a > 1$, ta có : $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$;
- Với $0 < a < 1$, ta có : $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Các tính chất trên đây là cơ sở để nghiên cứu hàm số lôgarit, cũng như để giải phương trình, bất phương trình lôgarit.

B- VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\log_4 18$ là số vô tỉ.

Lời giải :

Vì $\log_4 18 = \frac{1}{2}\log_2 18 = \frac{1}{2}(1 + \log_2 9) = \frac{1}{2} + \log_2 3$ nên chỉ cần chứng minh $\log_2 3$ là số vô tỉ.

Giả sử trái lại, $\log_2 3 = \frac{p}{q}$, trong đó p và q là số nguyên, $q > 0$.

Vì $\log_2 3 > 0$ nên p và q đều nguyên dương. Ta có $2^p = 3^q$. Đẳng thức này không thể xảy ra, vì vế trái là số chẵn, còn vế phải là số lẻ. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Tính $\log_6 16$, biết rằng $\log_{12} 27 = a$.

Lời giải :

Ta có $\log_6 16 = 4\log_6 2 = \dfrac{4}{\log_2 6} = \dfrac{4}{1 + \log_2 3}$.

Bây giờ phải tính $\log_2 3$ theo a, hãy biến đổi $\log_{12} 27$ để làm xuất hiện $\log_2 3$.
Ta có

$$a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1 + \log_3 4}$$

$$= \frac{3}{1 + 2\log_3 2} = \frac{3}{1 + \dfrac{2}{\log_2 3}} = \frac{3\log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

Từ đó $a(2 + \log_2 3) = 3\log_2 3 \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a}{3 - a}$ (hiển nhiên $a \neq 3$).

Vậy $\log_6 16 = \dfrac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}} = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng ba số dương phân biệt a, b, c khác 1 theo thứ tự lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}\text{, trong đó } N > 0. \qquad (1)$$

Lời giải :

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\log_N c}{\log_N a} = \dfrac{\log_N b - \log_N a}{\log_N a.\log_N b} \cdot \dfrac{\log_N b.\log_N c}{\log_N c - \log_N b}$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\log_N \frac{b}{a}}{\log_N \frac{c}{b}} \Leftrightarrow \log_N \frac{b}{a} = \log_N \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$\Leftrightarrow b^2 = ac \Leftrightarrow$ a, b, c lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 4. Cho a, b, c > 0, b ≠ 1. Chứng minh rằng $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Lời giải :

Xét lôgarit cơ số b của hai vế:

$$\log_b\left(a^{\log_b c}\right) = \left(\log_b c\right)\left(\log_b a\right) \; ; \qquad (1)$$

$$\log_b\left(c^{\log_b a}\right) = \left(\log_b a\right)\left(\log_b c\right). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy hai vế có lôgarit (cơ số *b*) bằng nhau, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. So sánh các số $\log_3 4$ và $\log_4 5$.

Lời giải :

Xét tỉ số

$$\frac{\log_4 5}{\log_3 4} = \log_4 5.\log_4 3 < \left(\frac{\log_4 5 + \log_4 3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_4 15}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_4 16}{2}\right)^2 = 1.$$

Suy ra $\log_4 5 < \log_3 4$.